



Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 21 Kasım 2022	

Süre 75dk. Her soru eşit puandır.
Lagrange-Charpit Denklemleri:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_z)}$$

1. $x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$ denkleminin $z = x = y$ doğrusundan geçen çözümünü belirleyin.

Çözüm:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

$$dx + dy + dz = 0 \implies d(x+y+z) = 0 \implies u_1 = x+y+z = c_1$$

$$yzdx + xzdy + xydz = 0 \implies d(xyz) = 0 \implies u_2 = xyz = c_2$$

Genel çözüm

$$f(x+y+z) = xyz \implies f(3z) = z^3 \implies f(z) = z^3/27$$

Çözüm

$$(x+y+z)^3 = 27xyz$$

2. $yzdx + 2xzd y - 3xydz = 0$ Pfaff denkleminin (a) integrallenebilir olduğunu gösterin, (b) ilkel fonksiyonunu elde edin.

Çözüm: (a) $X = (P, Q, R) = (yz, 2xz, -3xy)$,

$$\text{curl}(X) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (-3x - 2x, y + 3y, 2z - z) = (-5x, 4y, z)$$

$$X \cdot \text{curl}(X) = -5xyz + 8xyz - 3xyz = 0$$

(b) 1. Yöntem. Natani yöntemini kullanalım. z 'yi sabit alırsak,

$$yzdx + 2xzd y = 0 \implies ydx + 2xdy = 0 \implies \frac{dx}{x} + 2\frac{dy}{y} = 0 \implies \ln x + \ln y^2 = \ln c_1$$

$$u = xy^2$$

alalım.

$$du = y^2 dx + 2xy dy \implies \frac{z}{y} du = yz dx + 2xz dy = 3xy dz$$

$$\frac{z}{y} du - 3xy dz = 0 \implies z du - 3xy^2 dz = 0 \implies z du - 3u dz = 0 \implies \frac{du}{u} - 3 \frac{dz}{z} = 0$$

İlkel fonksiyon

$$\phi = \frac{u}{z^3} = \frac{xy^2}{z^3} = c$$

2. Yöntem. Denklemi xyz ile bölelim.

$$\frac{dx}{x} + 2 \frac{dy}{y} - 3 \frac{dz}{z} = 0 \implies \ln x + 2 \ln y - 3 \ln z = \ln c \implies \ln\left(\frac{xy^2}{z^3}\right) = \ln c$$

$$\phi = \frac{xy^2}{z^3} = c$$

3. $p^2 z + q^2 - 4 = 0$ nonlineer denkleminin tam çözümünü belirleyin.

Çözüm: $F_x = F_y = 0, F_z = p^2,$

$$\frac{dp}{-p^3} = \frac{dq}{-qp^2} \implies \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

1. Yol. $q = ap.$ Denklemden

$$p^2 z + a^2 p^2 - 4 = 0 \implies p^2 = \frac{4}{z + a^2} \implies p = \frac{2}{\sqrt{z + a^2}}, \quad q = \frac{2a}{\sqrt{z + a^2}}$$

$$dz = p dx + q dy \implies \sqrt{z + a^2} dz = 2 dx + 2 a dy \implies \frac{2}{3} (z + a^2)^{3/2} = 2x + 2ay + 2b$$

$$z = 3^{2/3} (x + ay + b)^{2/3} - a^2$$

2. Yol. $p = aq.$

$$q^2 = \frac{4}{a^2 z + 1} \implies q = \frac{2}{\sqrt{a^2 z + 1}}, \quad p = \frac{2a}{\sqrt{a^2 z + 1}}$$

$$\sqrt{a^2 z + 1} dz = 2 a dx + 2 dy \implies \frac{2}{3} \frac{(a^2 z + 1)^{3/2}}{a^2} = 2ax + 2y + 2b \implies a^2 z + 1 = (3a^3 x + 3a^2 y + 3a^2 b)^{2/3}$$

$$z = 3^{2/3} \left(x + \frac{y}{a} + \frac{b}{a} \right)^{2/3} - \frac{1}{a^2}$$

İki çözüm aynıdır. İkinci çözümde $a \rightarrow \frac{1}{a}$ ve $b \rightarrow \frac{b'}{a}$ yazarsak birinci çözümü elde ederiz.